

<b>D D Tentti</b>	<b>Insinöörimatematiikka D1</b>
<b>D D 13.10. 2007</b>	<b>MAT-10314 / Kaarakka</b>

Vastaa kaikkiin kysymyksiin ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Jokaisen kysymyksen vastaus laitetaan **OMALLE PAPERILLEEN**. Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. Todista induktioperiaatetta käyttäen, että

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. (a) Tason  $\mathcal{P}$  yhtälö vektorimuodossa on  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Esitä tason  $\mathcal{P}$  yhtälö yleisessä muodossa  $ax + by + cz + d = 0$ .

(b) Tasolle  $\mathcal{P}$  kuuluu suora  $l$ , jonka yhtälö vektorimuodossa on  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Etsi pisteen  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  lyhin etäisyys suorasta  $l$ .

3. (a) Olkoot  $z_1 = 2 - 2j$  ja  $z_2 = 1 + j$ . Laske  $z_1 z_2$  ja  $\frac{z_1}{z_2}$ .

(b) Olkoon  $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}j}$ .  
Esitä  $z$  muodossa  $x + yj$ .  
Laske  $z^3$ .

(c) Olkoon  $z = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}j}$ . Etsi kompleksiluvun  $z$  kaikki toisistaan poikkeavat kolmannet juuret  $z^{\frac{1}{3}}$  ja esitä ne polaarimuodossa.

4. (a) Muodosta vaakariviporrasmuodossa oleva matriisi, joka on vaakariviekvivalentti matriisin  $A$  kanssa, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Yhtälöryhmän  $H$  kokonaimatriisi on vaakariviekvivalentti matriisin  $B$  kanssa, kun

$$H = \begin{cases} x_1 - 3x_2 & = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 & = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 & = 3. \end{cases} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Etsi yhtälöryhmän ratkaisu vektorimuodossa.

---


$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0, \quad s\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}.$$