

Ei laskimia, taulukkokirjoja tai muuta kirjallisuutta.

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Laske A :n determinantti. (3p)
 (b) Jos A on kääntyvä, laske sen käänteismatriisi. Jos ei ole, selitä miksi. (3p)

2. Tarkastellaan edelleen tehtävän 1 matriisia A .

- (a) Etsi A :n sarakeavaruudelle jokin kanta. (2p)
 (b) Esitä vektori

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tämän kannan avulla. (3p)

- (c) Mitkä ovat A :n rivi- ja nolla-avaruuksien dimensiot? (1p)

3. Olkoot $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ja $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ määritely lausekkeilla

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_2, 2x_1 + 3x_2),$$

$$S(y_1, y_2, y_3) = \left(y_3 - y_1, 2y_1 - y_2, \frac{1}{2}y_1 + y_3, y_2 \right).$$

- (a) Anna yhdistettyjen kuvausten $T \circ S$ ja $S \circ T$ lausekkeet samanlaisessa muodossa kuin T ja S on annettu yllä, tai jos se on mahdotonta, selitä miksi. (2p)
 (b) Ortogonalisoi Gram-Schmidt-menetelmällä S :ää vastaavan matriisin sarakevektoreiden joukko. (4p)

Vihje: Laskujen helpottamiseksi mieti tarkkaan missä järjestyksessä valitut vektorit ortogonalisoitavaksi.

4. Olkoon B neliömuotoon $f(x, y) = 3x^2 - 2\sqrt{2}xy + 2y^2$ liittyvä matriisi.

- (a) Selvitä B :n ominaisarvot ja niiden avulla B :n definiittisyys. (2p)
 (b) Etsi kullekin ominaisarvolle vastaava ominaisavaruus. (2p)
 Vihje: Rivioperaatioissa käytettävän kertoimen ei tarvitse olla kokonaisluku...
 (c) Diagonalisoi B eli esitä B muodossa $B = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi ja P on kääntyvä matriisi. (2p)