Insinöörimatematiikka C 2 (Vehmanen)

Tentti 29.11.2006

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

– Jokaisen tehtävän vastaus ERI PAPERILLE.

– Jokaiseen paperiin NIMESI ja OPISKELIJANUMEROSI.

1 a) Laske elementaarisia vaakarivimuunnoksia käyttäen redusoitu riviporrasmuoto kokonaismatriisille

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

b) Esitä tuon kokonaismatriisin tarkoittaman yhtälö(ryhmän)n $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kaikki ratkaisut.

2. Esitä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

2-kertaiseen ominaisarvoon $\lambda = 6$ **a)** liittyvät kaikki ominaisvektorit,

b) ja poimi noista ominaisvektoreista maksimimäärä lineaarisesti riippumattomia vektoreita ominaisavaruuden virittäjiksi ja kantavektoreiksi.

c) Tarkista **b**-kohdan vektoreittesi lineaarinen riippumattomuus.

Vihje **b**-kohtaan: Lineaarisesti riippumattomat ratkaisut saadaan yleensä siten, että valitaan vapaissa muuttujissa vuoron perään yksi muuttuja 1:ksi ja muut 0:ksi.

3. Yksi Lause lupaa, että symmetrisen reaalimatriisin 2-kertaiseen ominaisarvoon liittyy 2 ortogonaalista ominaisvektoria. Miten ne löydetään, jäi sanomatta. Oletetaan, että sait edellisessä tehtävässä kantavektoreiksi

$$\mathbf{a} = [1, 2, 0]^T, \ \mathbf{b} = [0, -2, 1]^T$$

(vaikka näitä tuskin sait). Jälkimmäinen eli $\mathbf{b}$ voidaan nyt korvata projisoimalla se ensin $\mathbf{a}$:lle ja vähentämällä sitten tämä projektiovektori $\mathbf{b}$:stä.

a) Koska projektion kaavat eivät kuulu kurssiin, tee projisointi ratkaisemalla (mahdoton) yhtälö $\mathbf{a}\,x = \mathbf{b}$ neliösumman minimoinnilla eli ratkaisemalla (sen sijaan) normaaliryhmä

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a}\, x = \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

b) Tarkista, ovatko $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}\,x$ kohtisuorassa, kun x on **a**-kohdan tuloksesi.

c) Tarkista, onko $\mathbf{b}$ vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{c}$ lineaarikombinaatio (ja $\mathbf{c}$ siis siltä osin kelvollinen korvaamaan kantavektori $\mathbf{b}$:n).

4. Perttulassa havainnollistetaan parilla esimerkillä, että neliömatriisin A määräämä ns. neliömuoto $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ "voidaan aina esittää" myös symmetrisen matriisin avulla. Osoita, että

a) $\frac{1}{2}(A + A^T)$ on symmetrinen matriisi

ja että $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pätee

b) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{x}$,

c) $\mathbf{x}^T \frac{1}{2}(A + A^T)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$.