

- Ei muistutuksia, kirjallisuutta, laskinta.

1 a) Laske elementaarisia vaakarivinvuunnoksia käyttäen redusoidu rivi-
porrasmuoto kokonaismatriisille

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

b) Esitä tuon kokonaismatriisin tarkoitaman yhtälöryhmän $Ax = b$
kaikki ratkaisut.

2. Yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = 11 \\ x = -z - 2w = -7 \end{cases}$$

on saatu
ratkaisuksi

$$\begin{cases} x = s + 2t - 7 \\ y = -2s - 3t + 6 \\ z = s \\ w = t \end{cases}$$

Ratkaisut voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Osoita vektorit $[1, -2, 1, 0]^T$, $[2, -3, 0, 1]^T$, $[-7, 6, 0, 0]^T$ lineaari-
sesti riippumattomiksi!

b) Kuitenkaan ei sanota, että nuo kolme vektoria virittävät ratkaisujen \mathbf{x}
joukon. Syytä on, että ratkaisujen \mathbf{x} joukko ei ole \mathbb{R}^4 :n alavarustus.
Osoita, että ratkaisujen \mathbf{x} joukko ei ole \mathbb{R}^4 :n alavarustus.

3 a) Laske kaikki ominaisarvot matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Laske ja esitä kuhunkin ominaisarvoon liittyvät kaikki ominaisvek-
torit.

c) Totea kuhunkin ominaisarvoon liittyvän ominaisvaruuden kanta ja
dimensio.

4. Osoita, että reaalisesta $m \times n$ -matriisista A muodostetun matriisin AA^T
ominaisarvo λ on ei-negatiivinen.

Vihje: Yhtälöstä $AA^T \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ seuraa mm. että $\mathbf{x}^T (A^T \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\lambda \mathbf{x})$.