

D D	Tentti	Insinöörimatematiikka D2
D D	18.12. 2009	MAT-10324 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tehtävässä 3 riittää pelkkä vastaus. Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

1. (a) Muodosta redusoidussa vaakariviporrasmuodossa oleva matriisi, joka on vaakariviekvivalentti matriisin A kanssa, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (b) Yhtälöryhmän H kokonaimatriisi on vaakariviekvivalentti matriisin B kanssa, kun

$$H = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Etsi yhtälöryhmän H ratkaisu vektorimuodossa.

2. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -9 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Laske, jos mahdollista, $2AC$ ja BC .
- (b) Laske, jos mahdollista, B^{-1} .
- (c) Laske, jos mahdollista, $\det(A)$.

3. Vastaa lyhyesti (a)-(f) kohtien kysymyksiin. Jokaisen kohdan oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään yksi piste ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

Tarkastellaan 4×4 -matriisia M , jonka sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomia.

- (a) Onko matriisi M kääntyvä?
- (b) Mikä on matriisin M aste?
- (c) Mitä on $\dim(\text{null}(M))$?
- (d) Mikä on matriisin M redusoitu vaakariviporrasmuoto?
- (e) Onko $\det(M) = 0$?
- (f) Jos $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$, voiko matriisiyhtälöllä $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ olla ratkaisuja ääretön määrä?

4. (a) Olkoon

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Etsi matriisin E ominaisarvot ja ominaisarvoja vastaavat ominaisavaruudet.

- (b) Olkoot B ja C $n \times n$ -matriiseja. Osoita, että jos $B \sim C$ (eli matriisi B on similaarinen matriisin C kanssa), niin $\det(B) = \det(C)$.