

Insinöörimatematiikka X 5

Tentti 08.12.2009

Ei laskimia, taulukkokirjoja tai muuta kirjallisuutta. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

1. Funktion $f(x, y) = 3y - 2xy + 1$ integraali on 0 kolmiossa, jonka kärkipisteinä ovat $(0, 2)$, $(-2, 0)$ ja $(0, 2a)$. Mitä arvoja a voi saada?
2. Olkoon B origokeskinen k -säteinen pallo.

(a) Laske integraali pallokoordinaateissa annetulle funktiolle $e^{-\rho^3}$ integrointialueena B .

(b) Laske

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz.$$

Vihje: Koko avaruutta \mathbb{R}^3 voidaan pitää äärettömän suurena origokeskisenä pallona.

3. Olkoon y muuttujan x funktio. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' + 3y' + y = x^2 + 3x + 1.$$

4. Olkoot x ja y muuttujan t funktioita. Mikä on differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

ratkaisu alkuarvoilla $x(0) = 1$, $y(0) = 2$?

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1.
$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

2.
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

3.
$$m = \iint_R \rho(x, y) da, \quad J = \iint_R d(x, y)^2 \rho(x, y) da$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_R x \rho(x, y) da, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_R y \rho(x, y) da$$

4.
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$$

5.
$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(x); y = e^{-A(x)} \left(\int f(x) e^{A(x)} dx + C \right), \quad A'(x) = a(x)$$

6.
$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7.
$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ja} \quad \cos \phi = \frac{b}{A}, \quad \sin \phi = \frac{a}{A} \quad \text{eli} \quad \phi = \arctan \frac{a}{b} \quad (\pm \pi)$$

8.
$$f(x) = c e^{\alpha x}$$

$$y(x) = K e^{\alpha x} \quad \text{jos } \alpha \text{ ei ole kar. yhtälön juuri}$$

$$y(x) = K x e^{\alpha x} \quad \text{jos } \alpha \text{ on kar. yhtälön 1-kertainen juuri}$$

$$y(x) = K x^2 e^{\alpha x} \quad \text{jos } \alpha \text{ on kar. yhtälön 2-kertainen juuri}$$

9.
$$y'' + \omega^2 y = p \cos \omega x + q \sin \omega x$$

$$y(x) = A x \cos \omega x + B x \sin \omega x, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \quad \text{ja} \quad B = \frac{p}{2\omega}$$

10.
$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1 ; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut $e^{\alpha x} \cos \beta x$ ja $e^{\alpha x} \sin \beta x$

(iii) k-kertainen reaalijuuri λ_1 , ratkaisut $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$

(iv) k-kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut $e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$
 $e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$

11.
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$$

$$\mathbf{X}(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \right]$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v} \quad \dots, \quad \text{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}, \quad \text{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$$

12.
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + e^{\lambda t} \mathbf{k} \quad \dots \quad \mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \dots \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = -\mathbf{k}$$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)); \quad F' = f, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x) \underbrace{v'(x)}_{dv(x)} dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$