MAT-10424 Insinöörimatematiikka D2 u

Tentti 12.12.2011

- **Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle konseptille ja 3-4 toiselle konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Suoran kaksi pistettä ovat $A = (1,1,1)$ ja $B = (3,1,2)$.
Tason kolme pistettä ovat $C = (1,0,-2)$, $D = (-3,2,0)$ ja $E = (1,1,-5)$.
a) Määritä suoran vektorimuoto $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$.
b) Määritä tason yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$.
c) Missä avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä suora leikkaa tason?

2. Henkilöt A, B ja C ostavat tuotteita x, y, z, w seuraavan taulukon mukaiset kappalemäärät ja jokainen käyttää ostoksiinsa tasan 45 euroa.

	x	y	z	w
A	1	3	2	9
B	2	2	3	3
C	2	3	1	9

Mitkä ovat tuotteiden hinnat? Määritä kaikki ratkaisut sekä jokaisen tuotteen alin ja ylin mahdollinen hinta. Negatiivisia hintoja ei voi olla.

3. Vektorit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ja niiden koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$ ovat

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Mitkä ovat kannan $\mathcal{B}$ kantavektorit?

4. a) Mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja ominaisavaruudet=ominaisvektorien joukot.

$$A = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

b) Määritä diagonalisoituvuutta hyväksikäyttäen, mitä on A^{100}.

MAT-10424 Insinöörimatematiikka D2 u, kaavoja

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$

4. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

5. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

6. $(AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

7. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

8. $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = U[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}},\ \ [\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = U^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$

9. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x},\ A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$

10. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

11. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},\ \det(A - \lambda I) = 0$

12. $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

13. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1,\ \mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\dfrac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{x}_k}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}\right)\mathbf{v}_i$

14. $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$