



Tentissä ei saa käyttää laskinta eikä kirjallista materiaalia.

- Oletetaan, että vektorit \mathbf{u} ja \mathbf{v} ovat lineaarisesti riippumattomia \mathbb{R}^n :n vektoreita. Osoita, että $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ja $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.
- Olkoon $A \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ ja $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Tiedetään, että $\text{rank}(B) = 2$ ja että

$$\text{rref}([A \mid B]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osoita tarkasti, että $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$.

- Määrittele seuraavat käsitteet

- aliavaruuden kanta,
- ortonormaali joukko,
- matriisin karakteristinen polynomi.

- Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ja $U = \text{span}(\mathbf{u})$. Määrittelemme Householderin matriisin

$$H = I - \frac{2}{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

- Osoita, että $H^{-1} = H$.
- Osoita, että \mathbf{u} on H :n ominaisvektori. Mikä on sitä vastaava ominaisarvo?
- Olkoon $\mathbf{y} \in U^\perp$. Osoita, että \mathbf{y} on H :n ominaisvektori. Mikä on sitä vastaava ominaisarvo?