MAT-13421 Laaja Matematiikka 2i
Tentti 18.12.2009

1. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 6 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 9 & 1 & -7 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5},$$

jolloin

$$\operatorname{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Etsi aliavaruudelle $\mathcal{R}(A)$ kanta.

b. Onko joukko $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ lineaarisesti riippumaton.

c. Kirjoita yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ yleinen ratkaisu.

Perustele ratkaisusi.

2. On annettu matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tehtävänäsi on tutkia, onko A ei-singulaarinen. Selitä miten ratkaiset probleeman, kun on annettu

a. $\operatorname{rref}(A)$,

b. nolla-avaruus $\mathcal{N}(A)$,

c. kuva-avaruuden $\mathcal{R}(A)$ kanta,

d. $\operatorname{rank}(A)$,

e. $\det(A)$,

f. A:n ominaisarvot.

3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a. Muodosta A:n karakteristinen polynomi.

b. Totea, että A:lla on yksi reaalinen ja kaksi kompleksista ominaisarvoa.

c. Olkoon λ saatu reaalinen ominaisarvo. Hae kanta ominaisavaruudelle $\mathbb{E}_\lambda$.

4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 14 \\ 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 2}.$$

Tiedetään, että

$$\operatorname{rref}\left([A \mid B]\right) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Haluamme löytää sellaisen matriisin $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, että $AX = B$.

Onko ratkaisua olemassa? Jos sellainen matriisi löytyy, niin onko se yksikäsitteinen? Jos probleemalla on ratkaisu, kirjoita yksi ratkaisu näkyviin. **Perustele ratkaisusi.**

Vihje. Kirjoita $X = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ ja edelleen $AX = [A\mathbf{x}_1\ A\mathbf{x}_2]$.