

MAT-13430 Laaja matematiikka 3

Tentti 31.01.2007

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoon $0 < a \leq b$. Osoita, että silloin

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b-a}{a}.$$

(Vihje: Väliarvolauseesta voi olla apua.)

2. Montako juurta yhtälöllä $x^5 + 5x + 1 = 0$ on välillä $-1 < x < 0$?

3. Osoita oikeaksi tai vääräksi: Jos $u < v$, niin $\arctan u - \arctan v < v - u$.

4. a) Laske integraali $\int_1^3 x\sqrt{10-x} dx$.

- b) Pitääkö paikkansa: $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^3} dx = 0$? Ellei, niin korjaa ja selvitä tilanne.

5. a) Osoita oikeaksi tai vääräksi: Jos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ovat positiivitermisiä

sarjoja, joista $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenee, ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

- b) Tutki sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$. Mitä seuraavista se on: suppeneva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva, hajaantuva? Leibniz