

# MAT-13430 Laaja matematiikka 3

Tentti 19.02.2009

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

**Perustele kaikki vastauksesi!**

1. Tutki, onko funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + x \sin(1/x)}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

jatkuva.

2. Tutki, kuinka monta (reaalista) ratkaisua yhtälöllä  $2x - 1 - \sin x = 0$  on.

3. Laske raja-arvot

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^m(ax)}{\sin^n(bx)}$ , kaikilla niillä parametrien arvoilla

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , joilla raja-arvo on olemassa.

(Vihje: Käsittele ensin tapaus  $m = n = 1$ .)

4. a) Laske integraali  $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$ ,

b) Tutki, onko integraali  $\int_{-1}^1 x^{-3} dx$  suppeneva, ja myönteisessä tapauksessa laske sen arvo.

5. a) Millä  $q$ :n arvoilla sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + k)^q}$  suppenee?

b) Mitä seuraavista sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k^2}{k^3 + 1}$  on: suppeneva, hajaantuva, itseisesti suppeneva, ehdollisesti suppeneva?