

MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 19.03.2007

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ ja $A \subset B$. Osoita oikeaksi tai vääräksi:
- $\text{int } A \subset \text{int } B$
 - $\text{ext } A \supset \text{ext } B$
 - $\text{bd } A \subset \text{bd } B$
 - $\text{cl } A \subset \text{cl } B$ (cl on closure eli sulkeuma).

2. Todista (jatkuvuuden ja kompaktisuuden määritelmiin nojautuen), että jos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva ja $S \subset \mathbb{R}^n$ on (jono)kompakti, niin myös kuvajoukko $f(S) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in S : y = f(x)\}$ on (jono)kompakti.

3. a) Tarkastellaan funktiota $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \tan x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Onko funktio f jatkuva origossa?

- b) Millä kaikilla parametrin $n \in \mathbb{N}$ arvoilla funktiolla $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^n y^2}{x^2 + y^4}$$

on raja-arvo, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

4. Laske yhdistetyn kuvauksen $g \circ f$ derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä $(1, -1)$, kun

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{x^2 + 3y^2} \\ \sqrt{y+2} \end{bmatrix}, \quad g(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^2 + v^2 + 2w^2 \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

5. Laske integraali $\iint_{\Omega} (x + 4y^2) da$, kun Ω on suorien $y = -x$, $y = x - 2$ ja $y = 3$ rajaama kolmio.

6. Laske sylinterien $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ja $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$ leikkauksen määrittelemän kappaleen tilavuus. (Huom. Eroa voi olla integroinnin vaikeudessa eri integroimisjärjestyksissä.)