

# MAT-13440 Laaja matematiikka 4

Tentti 19.03.2007

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Olkoot  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  ja  $A \subset B$ . Osoita oikeaksi tai vääräksi:
- $\text{int } A \subset \text{int } B$
  - $\text{ext } A \supset \text{ext } B$
  - $\text{bd } A \subset \text{bd } B$
  - $\text{cl } A \subset \text{cl } B$  (cl on closure eli sulkeuma).

2. Todista (jatkuvuuden ja kompaktisuuden määritelmiin nojautuen), että jos  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva ja  $S \subset \mathbb{R}^n$  on (jono)kompakti, niin myös kuvajoukko  $f(S) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in S : y = f(x)\}$  on (jono)kompakti.

3. a) Tarkastellaan funktiota  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \tan x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Onko funktio  $f$  jatkuva origossa?

- b) Millä kaikilla parametrin  $n \in \mathbb{N}$  arvoilla funktiolla  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{x^n y^2}{x^2 + y^4}$$

on raja-arvo, kun  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ?

4. Laske yhdistetyn kuvauksen  $g \circ f$  derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä  $(1, -1)$ , kun

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{x^2 + 3y^2} \\ \sqrt{y+2} \end{bmatrix}, \quad g(u, v, w) = \begin{bmatrix} u^2 + v^2 + 2w^2 \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix}.$$

5. Laske integraali  $\iint_{\Omega} (x + 4y^2) da$ , kun  $\Omega$  on suorien  $y = -x$ ,  $y = x - 2$  ja  $y = 3$  rajaama kolmio.

6. Laske sylinterien  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  ja  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$  leikkauksen määrittelemän kappaleen tilavuus. (Huom. Eroa voi olla integroinnin vaikeudessa eri integroimisjärjestyksissä.)