MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 18.05.2007

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. a) Olkoon S reaalinen diagonalisoituva $n \times n$-matriisi, jonka ainoa ominaisarvo on λ. Mitä ovat silloin λ:n algebrallinen ja geometrinen kertaluku? Osoita edelleen, että välttämättä $S = \lambda I$.

   b) Todista oikeaksi tai vääräksi: Jos A ja B ovat $n \times n$-matriiseja, B ei-singulaarinen ja λ on A:n ja μ B:n ominaisarvo, niin λ / μ on tulon AB^{-1} ominaisarvo.

2. Olkoon A vinosymmetrinen reaalinen $n \times n$-matriisi. Osoita:
   a) Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$.
   b) Jos λ on A:n reaalinen ominaisarvo, niin $\lambda = 0$.
   c) Matriisilla $I + A$ ei ole nolla ominaisarvona.

3. Hae funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ lokaalit ääriarvot ja tutki niiden laatu (eli ovatko lokaaleja minimi- tai maksimikohtia vai satulapisteitä).

4. Hae matriisin $M = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit (ominaisavaruuksien kannat). Millä vakioiden a ja b arvoilla (jos millään) M on diagonalisoituva?

5. Hae differentiaaliyhtälön $y' = (1+x)(1+y)$, yleinen ratkaisu ja alkuehdon $y(0) = 0$ toteuttava ratkaisu.

6. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösysteemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Laske eksponenttimatriisi e^{At}.