

## MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 26.05.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske integraali  $\iint_S \frac{\sin x}{x} da$ , kun  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y, x \leq 1, y \leq 1\}$ .
2. Laske  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dv$ , missä  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  on kappale, jota rajoittavat tasot  $y + z = 2$  ja  $y = 0$  sekä sylinteri  $x^2 + z^2 = 1$ .
3. Mitä olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen avulla voidaan sanoa seuraavien alkuarvotehtävien ratkaisuisista:
  - a)  $y' = x^2 y^{-\frac{1}{2}}, y(0) = 1$ ,
  - b)  $y' = x^2 y^{-\frac{1}{2}}, y(1) = 1$ ?
  - c) Ratkaise yllä olevista alkuarvotehtävistä ne, joilla yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa.

4. Muunna funktioita  $y(t)$ ,  $u(t)$  koskeva differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y'' - 2u'' + y' - 3u' - y + u = \sin t \\ 2y'' - 2u'' + 3y' - u' - 4y = e^t \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

- a) Hae differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.
- b) Ratkaise differentiaaliyhtälö alkuarvolla  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$ .
- c) Onko systeemi tasapainopisteessään  $\mathbf{0}$  stabiili?