

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 18.05.2007

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. a) Olkoon S reaalinen diagonalisoituva $n \times n$ -matriisi, jonka ainoa ominaisarvo on λ . Mitä ovat silloin λ :n algebrallinen ja geometrinen kertaluku? Osoita edelleen, että välttämättä $S = \lambda I$.
b) Todista oikeaksi tai vääräksi: Jos A ja B ovat $n \times n$ -matriiseja, B ei-singulaarinen ja λ on A :n ja μ B :n ominaisarvo, niin λ/μ on tulon AB^{-1} ominaisarvo.
2. Olkoon A vinosymmetrinen reaalinen $n \times n$ -matriisi. Osoita:
 - a) Kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on voimassa $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$.
 - b) Jos λ on A :n reaalinen ominaisarvo, niin $\lambda = 0$.
 - c) Matriisilla $I + A$ ei ole nolla ominaisarvona.

3. Hae funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ lokaalit ääriarvot ja tutki niiden laatu (eli ovatko lokaaleja minimi- tai maksimikohtia vai satulapisteitä).

4. Hae matriisin $M = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit (ominaisavaruuksien kannat). Millä vakioiden a ja b arvoilla (jos millään) M on diagonalisoituva?

5. Hae differentiaaliyhtälön $y' = (1+x)(1+y)$, yleinen ratkaisu ja alkuehdon $y(0) = 0$ toteuttava ratkaisu.

6. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
 - a) Laske eksponenttimatriisi e^{At} .
 - b) Ratkaise systeemi alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0]^T$.
 - c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?