TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20400/73040 Vektorianalyysi
Tentti 11.12.2009

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. **a)** Olkoon C pintojen $z = x+y^2$ ja $y = 2x$ leikkauskäyrä pisteestä $(0,0,0)$ pisteeseen $(2,4,18)$. Parametrisoi C.
Ohje: merkitse $t = x$.
b) Olkoon $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y, x, 2)$ ja C kuten **a**-kohdassa. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

2. Pinnalla S on parametrisointina $\mathbf{r}(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$, $0 \leq u \leq \pi/2$, $0 \leq v \leq 3$. Laske

$$\iint_S (x+y)\, dS.$$

3. Olkoon T pintojen $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ja $z = 0$ rajaama suljettu ja rajoitettu joukko. Laske kentän $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, -2xy, xz^2)$ vuo joukon T reunapinnan läpi joukosta T poispäin.

4. Vastaa vain joko **A**- tai **B**-kohtaan. (**A** on tarkoitettu vain Kauhasen toteutuskerroille osallistuneille.)

A. Määritellään Matlabissa ensin

```
syms x y z t theta phi real
F=[2*x-y,z-2*y,z]
```

Mikä käyrä- tai pintaintegraalitehtävä kussakin seuraavista yritetään ratkaista? Kuvaile, millainen käyrä tai pinta on kyseessä. Yhdessä integraalissa on virhe. Mikä se on ja miten se korjataan?

a)
```
r=[t,t^2,t^3]
int(subs(F,[x,y,z],r)*diff(r,t)',t,0,1)
```

b)
```
r=[3*cos(t),3*sin(t),z]
N=cross(diff(r,t),diff(r,z))
int(int((r(1)+r(2))*N',t,0,pi),z,-1,1)
```

c)
```
r=[3*sin(phi)*cos(theta),3*sin(phi)*sin(theta),3*cos(phi)]
N=cross(diff(r,phi),diff(r,theta))
int(int(subs(F,[x,y,z],r)*N',phi,0,pi),theta,-pi/2,pi/2)
```

B. Laske voimakentän

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\sin(x) - \frac{1}{3}y^3,\ \cos(y) + \frac{1}{3}x^3,\ xyz\right)$$

tekemä työ käyttäen Stokesin lausetta, kun kentän vaikutuspiste kulkee yhden kerran pintojen $x^2+y^2 = 1$ ja $z = 1$ leikkauskäyrän ympäri ylhäältä katsottuna vastapäivään.

Vain kurssia 73040 Vektorianalyysi (3 ov) suorittaville:

5. Laske

$$\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{-\sqrt{25-x^2-y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx.$$

Vihje: Kyseessä on tilavuus sille osalle eräästä pallosta, joka jää erään lieriön sisään.

Tulokset: ks. `http://www.math.tut.fi/courses/MAT-20400/`

MAT-20400 Vektorianalyysi, kokeen kaavaliite

1. **(1)** $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$

(4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$

(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

(7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$

(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

3. $$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\,ds = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz$$

4. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

5. $$\iint_S f\,dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\,du\,dv$$

6. $$\iint_S f\,dS = \iint_R f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

7. $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet (\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v))\,du\,dv$$

8. $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y,z(x,y)) \bullet \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dx\,dy$$

9. $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\,dV$$

10. $$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\,dS$$

11. $$f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

12. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t \qquad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$