MAT-20400 Vektorianalyysi Tehtävät 1-4
73040 Vektorianalyysi tehtävät 1-5
tentti 4.12.2006
Ansaitut bonuspisteet saat palauttamalla tehtäväpaperin ao. luennoitsijalle (Kauhanen 1. jakso, Pirttimäki 2. jakso).
Ei laskimia, taulukot jaetaan

1. Laske $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{F} = [-yx,\ z,\ y]$ ja C on

(i) $\mathbf{r}(t) = \left[\sqrt{t}, t, \sqrt{t}\right]$, $t \in [1, 2]$

(ii) suora joka yhdistää pisteet (0, 0, 0) ja (1, 2, 2).

2. (i) Määrää kentän $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ skalaaripotentiaali (mikäli on olemassa).

(ii) Laske $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, kun C on jana pisteestä (1, 1, 1) pisteeseen (2, –1, 3). (**F** (i)-kohdasta)

(iii) Olkoon $\mathbf{r} = (x,y,z)$ ja $r = \|\mathbf{r}\|$ ja **a** vakiovektori.
Laske $\nabla \bullet (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ ja ∇r.

3. (i) Laske pinnasta $z + x^2 + y^2 = 1$ ensimmäiseen oktanttiin jäävän pinnan pinta-ala.

(ii) Olkoon vektorikenttä $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + [-1, 1, 3]$, $\mathbf{r} = [x, y, z]$.
Laske vektorikentän **F** vuo läpi puolipallon $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$, $-2 \le z$. pinnan (pinnan positiivinen puoli on yläpuoli, siis vuon suunta "ylöspäin").
(Huom. vain puolipallon pinta)

4. Olkoon $\mathbf{F} = yze^{xy}\,\mathbf{i} + xz(1 + e^{xy})\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$.

Laske $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma$ ($\iint_S (\nabla \times F) \bullet \mathbf{n} ds$), kun **n** on S:n yksikkönormaali,
ja pinnan positiivinen puoli on yläpuoli ja S on puolipallon pinta:

$$x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4, \qquad -3 \le z\ .$$

5. (i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{3 - x^3}\,dx\,dy$

a) Piirrä integrointialue
b) Vaihda integrointijärjestys
c) laske integraali

(ii) Laske $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy$, missä R on x–akselin ja y–akselin sekä suorien $x + y = 1$ ja $x + y = 2$ rajoittama joukko 1. neljänneksessä.