

**MAT-20401 Vektorianalyysi**
Tentti 15.12.2010

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Olkoot kahden kappaleen paikkavektorit ajan t funktioina

$$\mathbf{r}_1(t) = (3 + 2t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k} \quad \text{ja}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (5 - 2t^3)\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

- a) Osoita, että kappaleet liikkuvat pitkin samaa käyrää.
b) Määritä parametriväli kummassakin tapauksessa, kun liike tapahtuu pisteiden $(3, 0, 1)$ ja $(21, 9, -8)$ välillä.
c) Laske kummankin kappaleen maksimi- ja minimivauhti **b**-kohdan siirtymissä.

2. Olkoon S paraboloidin $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ se osa, joka on tason $z = 4$ alapuolella. Laske S :n pinta-ala.

3. Olkoon S sylinteripinnan puolikas

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 3, x \leq 0, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ vuo S :n läpi z -akselista pois päin.

4. Vastaa vain joko **A**- tai **B**-kohtaan (huonompi huomioidaan).

A. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vuo puolipallon

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \leq 0\}$$

reunapinnan läpi joukosta T pois päin.

B. Kohdissa **i** ja **ii** Matlab-koodilla yritetään ratkoa eräs kurssin pintaintegrointitehtävä.

Selvitä kummassakin kohdassa, mikä tehtävä on kyseessä. Erityisesti kuvaile tarkkaan, millainen pinta S on (ilmaise S esimerkiksi xyz -koordinaateissa, sanallisesti tai hyvän kuvan avulla).

Toisessa koodeista on lisäksi virhe. Mikä se on ja miten se korjataan?

i)

```
syms x y z u v real
r=[sqrt(2)*sin(u)*cos(v),sqrt(2)*sin(u)*sin(v),sqrt(2)*cos(u)]
N=cross(diff(r,u),diff(r,v))
NN=sqrt(N*N')
int(int(subs(x^2+y^2+z^2,[x,y,z],r)*NN,u,0,pi/2),v,0,2*pi)
```

ii)

```
syms x y z u v real
T=[u*cos(v),u*sin(v),z]
F=[x*y,y*z,z*x]
int(int(int(subs(div(F,[x,y,z]),[x,y,z],T),u,0,1),v,0,pi),z,0,1)
```