MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 21.12.2011

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$ käyräintegraali yli käyrän $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t^2 + t, e^t)$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Olkoon lanka käyrän $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, \ y \geq 0\}$ muotoinen ja olkoon langan pituustiheys $\delta(x, y) = 3 - y$. Laske langan hitausmomentti y-akselin suhteen eli

$$I_y = \int_C x^2 \delta(x, y)\, ds.$$

3. Laske pallopinnan $x^2+y^2+z^2 = a^2$ massakeskipiste, kun pintatiheys $\delta(x, y, z) =$ etäisyyden neliö "etelänavalta" $(0, 0, -a)$.

4. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vuo joukon

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\right\}$$

reunapinnan läpi joukosta T poispäin.

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan Moodlessa viimeistään viikolla 2/2012.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. $\mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

2. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

$\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})$

$\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

$\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

3. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$

4. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy$

5. $\displaystyle \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$

6. $\displaystyle \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$

7. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\, (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. Massa ja massakeskipiste. Käyrälle C:

$$m = \int_C \delta\, ds, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\int_C x\delta\, ds, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\delta\, ds, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\int_C z\delta\, ds.$$

Pinnalle S:

$$m = \iint_S \delta\, dS, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\delta\, dS, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\delta\, dS, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\delta\, dS.$$

10. $\sin(2t) = 2\sin t\cos t, \qquad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$