MAT-20450 Fourier'n menetelmät Tentti 6.4.2010

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
– Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon T-jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Johda eli päättele kertoimelle a_1 tai b_1 (kumpi lieneekin tullakseen) laskukaava seuraavasti: integroi yhtälö

$$f(t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}a_0 \cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t)\cos(\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\cos(\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \ldots dt$ ja oleta, että yhtälön oikea puoli saadaan integroida yhteenlaskettava kerrallaan. Päättele jokaiselle oikean puolen integraalille arvo hyödyntäen integroitavan parittomuus ja jo(i)tain seuraavista:

$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,

$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$,

$2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

2. Funktio $f(t) = \sin(t)$ $(-\pi/2 \le t < \pi/2)$ jatketaan π-jaksoiseksi. Hahmottele sen kuvaajaa. Laske funktion $f(t)$ (jatketun version) Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

hyödyntäen funktion parillisuutta tai parittomuutta sekä jotain tehtävän **1** kaavoista, ja muodosta lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Helpottava voi olla myös $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$.

Käännä!

3. Olkoon $c > 0$. Laske Fourier-muunnoksen määritelmästä

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\mathrm{j}\omega t}\, dt$$

lähtien muunnos pulssille

a) $f_a(t) = \begin{cases} 0 & (t \le 0) \\ 2e^{-ct} & (t > 0) \end{cases}$ **b)** $f_b(t) = \begin{cases} -e^{ct} & (t \le 0) \\ e^{-ct} & (t > 0) \end{cases}$

Yhdessä kirjassa "ideoidaan" uusia Fourier-muunnopareja katsomalla, mitä tapahtuu funktioille ja niiden muunnoksille, kun $c \to 0+$.

c) Mitkä ovat **a**-kohdassa funktion $f_a(t)$ ja sen muunnoksen $F_a(\mathrm{j}\omega)$ raja-arvofunktiot, kun $c \to 0+$?

b) Mitkä ovat **b**-kohdassa funktion $f_b(t)$ ja sen muunnoksen $F_b(\mathrm{j}\omega)$ raja-arvofunktiot, kun $c \to 0+$?

Kommentti: Jos laskit oikein, niin sait saman raja-arvofunktion kummallekin Fourier-muunnokselle. Tuon kirjan ideoinnissa on siis pakko olla jotain vikaa. Fourier-muunnoksen käänteismuunnos ei nimittäin voi olla kaksi eri funktiota samanaikaisesti.

4. Olkoon $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$. Päättele Fourier-muunnos funktiolle

$$f(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

seuraavasti: esitä trigonometrinen funktio eksponenttifunktion avulla, käytä lineaarisuutta ja taajuussiirto-ominaisuutta (yksi alla luetelluista).

Tiedetään, että $e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x,$

joten $e^{-\mathrm{j}x} = \cos x - \mathrm{j}\sin x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x} = 2\cos x$ *ja* $e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x} = 2\mathrm{j}\sin x.$

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\mathrm{j}\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-\mathrm{j}\omega\tau}F(\mathrm{j}\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{\mathrm{j}at}f(t)\} = F(\mathrm{j}(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(\mathrm{j}t)\} = 2\pi f(-\omega)$.