SGN-1251 Signaalinkäsittelyn sovellukset
Välikoe 15.12.2010
Heikki Huttunen

Tentissä ja välikokeessa saa käyttää vain tiedekunnan laskinta. Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa. Sivuilla 1-3 on VÄLIKOE. Sivuilla 4-6 on TENTTI. Vastaa vain jompaan kumpaan kokeeseen, ei molempiin eikä sekaisin. Vastaa konseptille, ja kirjoita ensimmäiselle sivulle ylös isolla sana VÄLIKOE tai TENTTI. Jos olet suorittanut pakolliset harjoitukset aikaisemmin kuin tänä vuonna, merkitse paperin alkuun milloin (kevät/kesä/syksy/vuosi)

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Ei perusteluja, pelkkä tosi / epätosi. Oikea vastaus 1p, väärä vastaus -$\frac{1}{2}$p, ei vastausta 0p.

   (a) Pienimmän neliösumman menetelmällä (least squares method) valitaan kunkin taajuuskaistan bittimäärä audiokompressiossa.

   (b) Kernelitemppua (kernel trick) käytetään ikkunafunktion ENBW-arvon laskennassa.

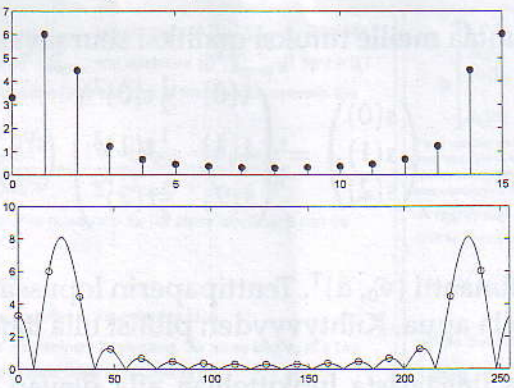
   (c) Takaisinlevitysmenetelmä (engl. backpropagation) on hermoverkkojen opetuksessa käytetty algoritmi.

   (d) Kuuden desibelin kaistanleveyttä käytetään arvoitaessa luokittelijan tehokkuutta.

   (e) Fisherin diskriminanttia voidaan käyttää luokittelijan suunnitteluun.

   (f) Ns. *circular buffering* -tekniikkaa käytetään ohjelmistojen toteutuksessa signaaliprosessoreille.

2. (a) Alla olevassa kuvassa on esitetty kuudentoista näytteen mittaisen signaalin DFT:n itseisarvo. Toisessa kuvassa olevassa kuvaajassa alkuperäisen DFT:n pisteiden välille on interpoloitu uusia arvoja niin, että kertoimia on 256. Miten tämä tehdään? (3p)

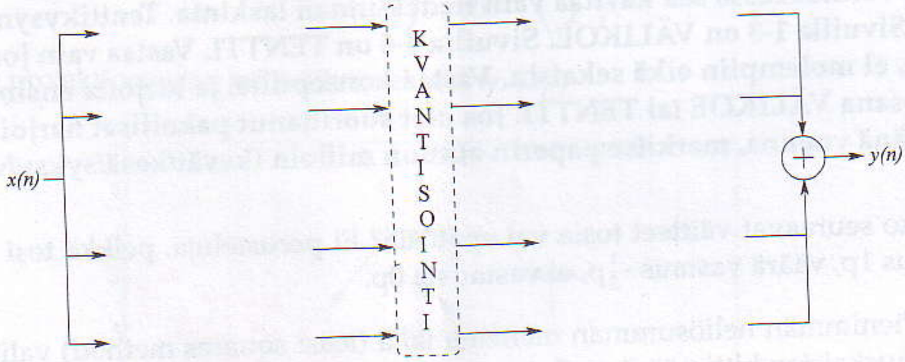


   (b) Yllä olevassa interpoloidussa spektrissä on runsaasti ylimääräisiä huippuja; alkuperäinen signaali koostui vain yhdestä taajuudesta, $x(n) = \sin(\frac{3}{16}\pi n)$. Kuinka spektrin energian leviämistä ympäröiville taajuuksille voidaan vähentää? (3p)

3. Täydennä alla oleva audiodatan kompressiossa vastaan tullut lohkokaavio, joka kuvaa signaalin jakoa taajuuskaistoihin suodinpankin avulla. Tässä tapauksessa signaali jaetaan yksinkertaisuuden vuoksi neljään kaistaan. "Kvantisointi" -lohkoon menevä data koostuu neljästä signaalista, joissa on yhteensä sama määrä näytteitä kuin signaalissa $x(n)$, mutta

VÄLIKOE

jaettuna erillisiin taajuuskaistoihin. Jos kvantisointilohkossa ei tehtäisi mitään, $y(n)$:n täytyisi olla (melkein) sama kuin $x(n)$. Piirrä myös selkeät kuvat käytettävien neljän suotimen amplitudivasteista.



4. Kappale on hetkellä $t(0) = 0$ s vapaassa pudotuksessa ja sen alkunopeus pystysuunnassa on v_0 ja paikka $s(0) = 0$. Paikasta tehdään kaksi muutakin mittausta hetkillä 2 s ja 4 s, jolloin saadaan seuraava taulukko.

Aika t	Paikka s(t)
0	0
2	22
4	83

Fysiikan kaavat antavat seuraavan yhteyden paikalle $s(t)$, alkunopeudelle v_0 ja vakiokiihtyvyydelle a:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Kaava voidaan muuntaa meille tutuksi malliksi seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(0) & \frac{1}{2}t(0)^2 \\ t(1) & \frac{1}{2}t(1)^2 \\ t(2) & \frac{1}{2}t(2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ a \end{pmatrix} + \epsilon.$$

Laske käsin PNS-estimaatti $(\hat{v}_0, \hat{a})^T$. Tenttipaperin lopussa on joitakin wikipediasta otettuja sivuja, joista voi olla apua. Kiihtyvyyden pitäisi olla lähellä gravitaatiovakiota g.

5. (a) Suunniteltaessa lineaarista luokittelijaa alla olevan kuvan kaksiulotteiselle datalle saadaan opetusdatasta kahden luokan kovarianssimatriiseiksi ja keskiarvoiksi seuraavat:

$$\mathrm{cov}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{cov}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

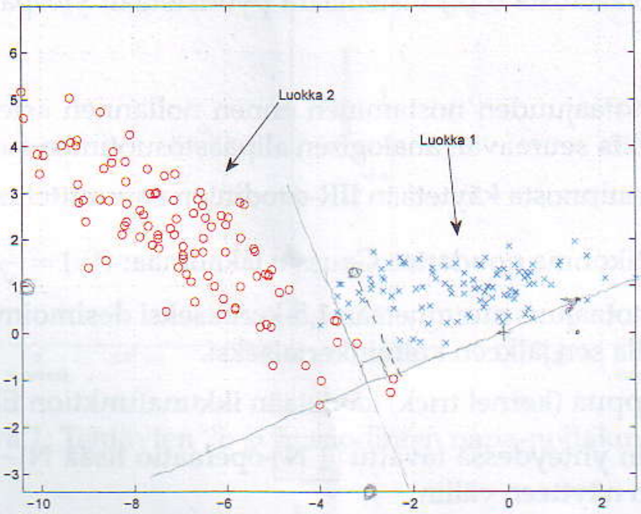
$$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Laske projektiosuoran määräävä vektori $\mathbf{w}$. (3p)

VÄLIKOE

(b) Projektiosuoran lisäksi tarvitaan kynnysarvo c, joka kumpaan luokkaan näyte kuuluu. Helpoin tapa valita c on projisoida luokkien massakeskipisteet vektorille **w** ja ottaa niiden keskiarvo. Laske c. (2p)

(c) Kuuluuko näyte $\mathbf{x} = (-3, 1)^T$ luokkaan 1 vai 2? (1p)



6. Anna palautetta kurssista sen kehittämistä varten. (0p)

Joitakin aiheeseen ehkä liittyviä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_{y=0}, \vec{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=i}$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_{y=i} \vec{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma^2_{between}}{\sigma^2_{within}} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1} - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0})^2}{\vec{w}^T \Sigma_{y=1} \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_{y=0} \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0}))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0}$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=0} + \vec{\mu}_{y=1})/2$$

$$\mathbf{Ta} = \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_w[0] & R_w[1] & \cdots & R_w[N] \\ R_w[1] & R_w[0] & \cdots & R_w[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_w[N] & R_w[N-1] & \cdots & R_w[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sw}[0] \\ R_{sw}[1] \\ \vdots \\ R_{sw}[N] \end{bmatrix}$$

These equations are known as the Wiener-Hopf equations. The matrix T appearing in the equation is a symmetric Toeplitz matrix. These matrices are known to be positive definite and therefore non-singular yielding a unique solution to the determination of the Wiener filter coefficient vector, $\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}$.

A regression model is a linear one when the model comprises a linear combination of the parameters, i.e.

$$f(x_i, \beta) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \phi_j(x_i)$$

where the coefficients, ϕ_j, are functions of x_i.

Letting

$$X_{ij} = \frac{\partial f(x_i, \beta)}{\partial \beta_j} = \phi_j(x_i).$$

we can then see that in that case the least square estimate (or estimator, in the context of a random sample), β is given by

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$