SGN-1251 Signaalinkäsittelyn sovellukset
Välikoe 12.12.2011
Heikki Huttunen

Tentissä ja välikokeessa saa käyttää vain tiedekunnan laskinta. Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa. Sivuilla 1-3 on VÄLIKOE. Sivuilla 4-6 on TENTTI. Vastaa vain jompaan kumpaan kokeeseen, ei molempiin eikä sekaisin. Vastaa konseptille, ja kirjoita ensimmäiselle sivulle ylös isolla sana VÄLIKOE tai TENTTI. Jos olet suorittanut pakolliset harjoitukset aikaisemmin kuin tänä vuonna, merkitse paperin alkuun milloin (kevät/kesä/syksy/vuosi)

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Ei perusteluja, pelkkä tosi / epätosi. Oikea vastaus 1p, väärä vastaus -$\frac{1}{2}$p, ei vastausta 0p.

   (a) Pienimmän neliösumman menetelmällä (least squares method) valitaan kunkin taajuuskaistan bittimäärä audiokompressiossa.

   (b) Lineaarisilla suotimilla on yleensä epälineaarisia suotimia suurempi murtumapiste.

   (c) Takaisinlevitysmenetelmä (engl. backpropagation) on hermoverkkojen opetuksessa käytetty algoritmi.

   (d) Kuuden desibelin kaistanleveyttä käytetään arvoitaessa luokittelijan tehokkuutta.

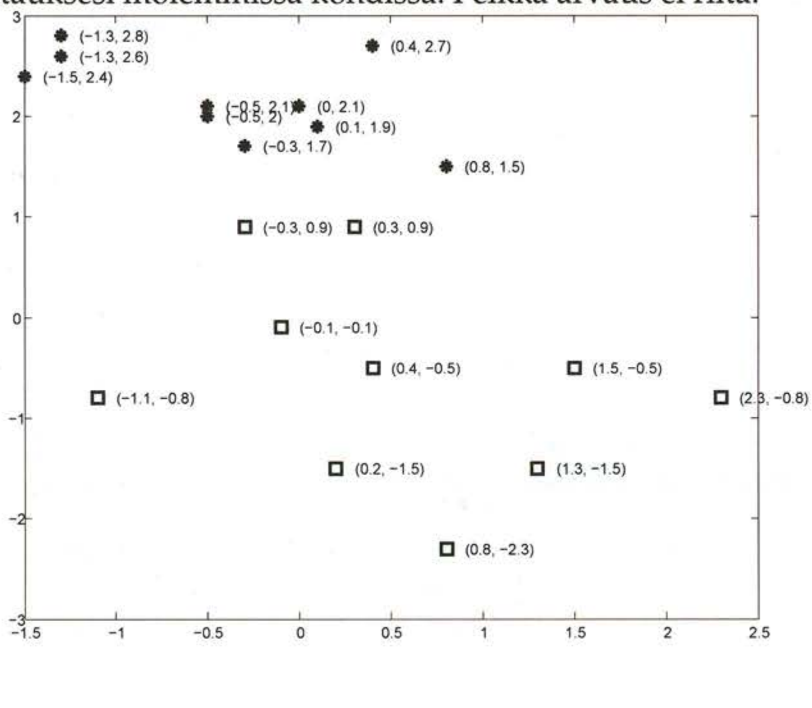
   (e) Fisherin diskriminanttia voidaan käyttää luokittelijan suunnitteluun.

   (f) Ns. *circular buffering* -tekniikkaa käytetään ohjelmistojen toteutuksessa signaaliprosessoreille.

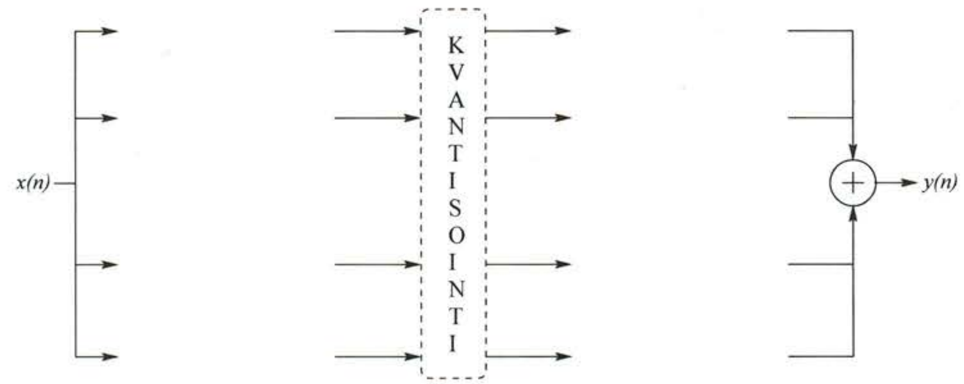
2. (a) Alla oleva kuva esittää opetusdataa, jossa on kaksi luokkaa: "neliöt" (□) ja "tähdet" ($*$). Kumpaan luokkaan 1-nearest neighbor (1-NN) -luokittelija sijoittaa pisteen $(0.7, 1)$?

   (b) Entä 3-NN-luokittelija?

   Perustele vastauksesi molemmissa kohdissa. Pelkkä arvaus ei riitä.



3. Täydennä alla oleva audiodatan kompressiossa vastaan tullut lohkokaavio, joka kuvaa signaalin jakoa taajuuskaistoihin suodinpankin avulla. Tässä tapauksessa signaali jaetaan yksinkertaisuuden vuoksi neljään kaistaan. "Kvantisointi" -lohkoon menevä data koostuu neljästä signaalista, joissa on yhteensä sama määrä näytteitä kuin signaalissa $x(n)$, mutta jaettuna erillisiin taajuuskaistoihin. Jos kvantisointilohkossa ei tehtäisi mitään, $y(n)$:n täytyisi olla (melkein) sama kuin $x(n)$. Piirrä myös selkeät kuvat käytettävien neljän suotimen amplitudivasteista.



4. Kappale on hetkellä $t(0) = 0$ s vapaassa pudotuksessa ja sen alkunopeus pystysuunnassa on v_0 ja paikka $s(0) = 0$. Paikasta tehdään kaksi muutakin mittausta hetkillä 2 s ja 4 s, jolloin saadaan seuraava taulukko.

Aika t	Paikka s(t)
0	0
2	22
4	83

Fysiikan kaavat antavat seuraavan yhteyden paikalle $s(t)$, alkunopeudelle v_0 ja vakiokiihtyvyydelle a:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Kaava voidaan muuntaa meille tutuksi malliksi seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(0) & \frac{1}{2}t(0)^2 \\ t(1) & \frac{1}{2}t(1)^2 \\ t(2) & \frac{1}{2}t(2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ a \end{pmatrix} + \epsilon.$$

Laske käsin PNS-estimaatti $(\hat{v}_0, \hat{a})^T$. Tenttipaperin lopussa on joitakin wikipediasta otettuja sivuja, joista voi olla apua. Kiihtyvyyden pitäisi olla lähellä gravitaatiovakiota g.

5. (a) Matlabin funktiolla suunnitellaan IIR-suodin, ja saadaan vektorit $a = [0.49, 0.98, 0.49]$ ja $b = [1.00, 0.69, 0.29]$. Nythän a kuvaa siirtofunktion osoittajan kertoimia ja b nimittäjän. Kirjoita (konseptille) puuttuva C-kielinen rivi, joka toteuttaa suotimen alla olevassa yksinkertaistetussa koodirungossa:

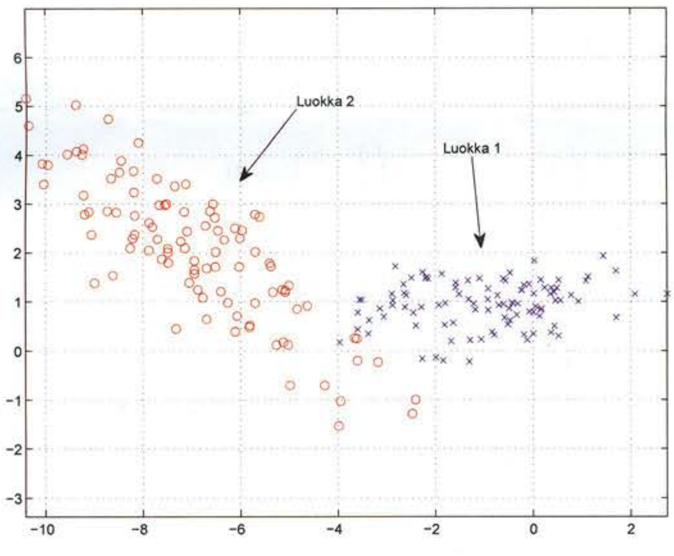
```
while (!finished)
{
   x[n] = ReadInput ();

   y[n] = ____________________________________________
   WriteOutput (y[n]);
   n = n + 1;
}
```

(b) Suunniteltaessa lineaarista luokittelijaa kaksiulotteiselle datalle (ks. kuva alla) saadaan opetusdatasta kahden luokan kovarianssimatriiseiksi ja keskiarvoiksi seuraavat:

$$\mathrm{cov}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{cov}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Laske projektiosuoran määräävä vektori **w**. (3p)



6. Anna palautetta kurssista sen kehittämistä varten. (0p)

SGN-1251 Signaalinkäsittelyn sovellukset
Tentti 12.12.2011
Heikki Huttunen

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? (Perusteluja ei tarvita. Oikea vastaus: 1 p, väärä: $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0 p.) Pistemäärä pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.

   (a) Näytteenottotaajuuden nostaminen ennen nollannen asteen pitopiirin käyttöä helpottaa ZOH:ta seuraavan analogisen alipäästösuotimen suunnittelua.

   (b) Bilineaarimuunnosta käytetään IIR-suodinten suunnittelussa.

   (c) Kvantisointikohina noudattaa Gaussin jakaumaa: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

   (d) Näytteenottotaajuus muunnetaan 1,5-kertaiseksi desimoimalla se ensin puoleen ja interpoloimalla sen jälkeen kolminkertaiseksi.

   (e) Lineaarisilla suotimilla on yleensä epälineaarisia suotimia suurempi murtumapiste.

   (f) Desimoinnin yhteydessä tavattu $\boxed{\downarrow N}$-operaatio lisää $N-1$ nollaa jokaisen kahden peräkkäisen näytteen väliin.

2. (a) Adaptiivisen suotimen kohdesignaalin autokorrelaatiomatriisi $\mathbf{R}$ ja ristikorrelaatiovektori $\mathbf{p}$ kohde- ja referenssisignaalien välillä ovat

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Millä painokertoimilla (w_0, w_1) kustannusfunktio saavuttaa miniminsä? (2p)

   (b) Kuvassa 1 on kaksi napa-nollakuviota. Kumpi on FIR-suotimen ja kumpi IIR-suotimen napa-nollakuvio? Millä perusteella? (2p)

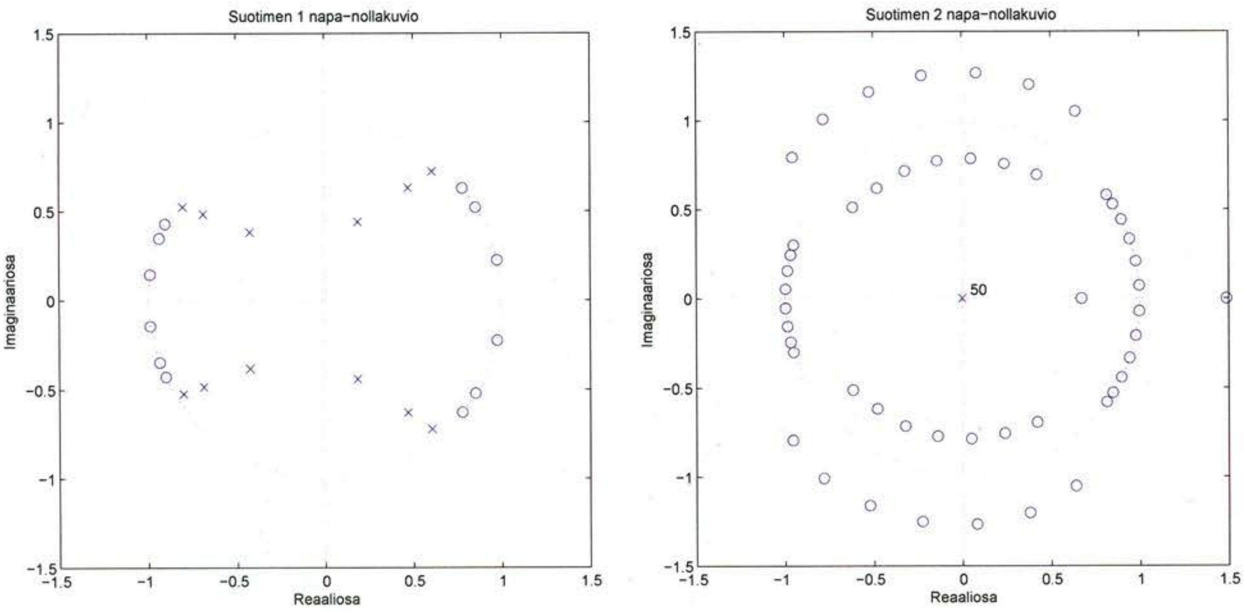
   (c) Ovatko kuvan 1 suotimet alipäästösuotimia, ylipäästösuotimia, kaistanpäästösuotimia vai kaistanestosuotimia? Millä perusteella? (2p).

3. Vastaa seuraaviin tehtäviin sanallisesti ja piirrä lohkokaaviot.

   (a) Kuinka adaptiivista suodatusta voidaan käyttää sikiön sydänäänten tunnistukseen? (2p)

   (b) Eräässä sovelluksessa mikrofonisignaaliin tulee jaksollista häiriötä, jonka taajuus vaihtelee hitaasti. Tämä halutaan erotella ei-jaksollisesta signaalista adaptiivisella suodatuksella. Kuinka se onnistuu kun käytettävissä on vain yksi signaali? (2p)

   (c) Täydennä oheisen lohkokaavio niin, että se esittää *toisen asteen* kohinanmuokkainta. (2p)



Kuva 1: Tehtävien 2b ja 2c suodinten napa-nollakuviot.

4. (a) Signaalin näytteenottotaajuus on 48000 Hz ja se halutaan tallentaa laitteelle, jonka näytteenottotaajuus on 6000 Hz. Signaalin olennaisin informaatio on taajuuskaistalla 0—2500 Hz, joka tulee säilyttää sellaisenaan ilman vaimennusta. Desimointi halutaan toteuttaa mahdollisimman tehokkaasti, joten kaikki usean vaiheen toteutukset on tutkittava.

   - Piirrä mahdollisten toteutusten lohkokaaviot. (2p)
   - Suotimet suunnitellaan Hamming-ikkunalla, jolloin $N = 3.3/\Delta f$. Laske kerrointen yhteismäärät eri toteutuksissa. (2p)
   - Laske montako kertolaskua sekunnissa eri toteutukset tarvitsevat. Mikä on tehokkain toteutus? (2p)

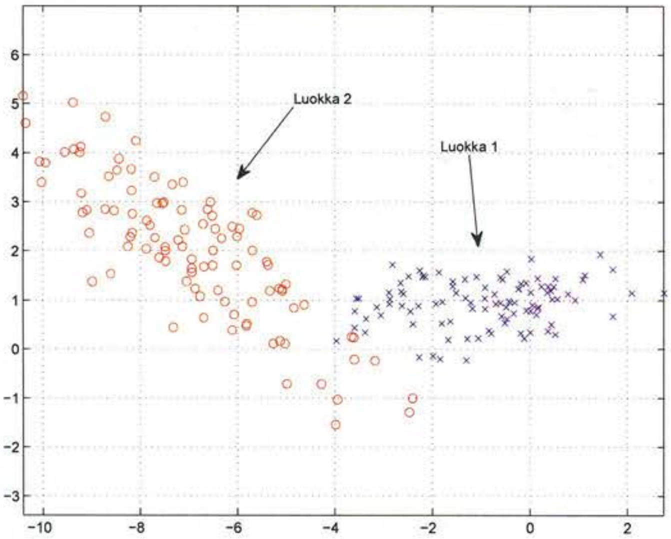
5. (a) Suunniteltaessa lineaarista luokittelijaa alla olevan kuvan kaksiulotteiselle datalle saadaan opetusdatasta kahden luokan kovarianssimatriiseiksi ja keskiarvoiksi seuraavat:

$$\mathrm{cov}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{cov}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Laske projektiosuoran määräävä vektori $\mathbf{w}$. (3p)

   (b) Projektiosuoran lisäksi tarvitaan kynnysarvo c, joka kumpaan luokkaan näyte kuuluu. Helpoin tapa valita c on projisoida luokkien massakeskipisteet vektorille $\mathbf{w}$ ja ottaa niiden keskiarvo. Laske c. (2p)

(c) Kuuluuko näyte $\mathbf{x} = (-3, 1)^{\mathsf{T}}$ luokkaan 1 vai 2? (1p)



6. Anna palautetta kurssista sen kehittämistä varten. (0p)

Joitakin aiheeseen ehkä liittyviä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_{y=0}, \vec{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=i}$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_{y=i} \vec{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma^2_{between}}{\sigma^2_{within}} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1} - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0})^2}{\vec{w}^T \Sigma_{y=1} \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_{y=0} \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0}))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0}$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=0} + \vec{\mu}_{y=1})/2$$

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{v}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_w[0] & R_w[1] & \cdots & R_w[N] \\ R_w[1] & R_w[0] & \cdots & R_w[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_w[N] & R_w[N-1] & \cdots & R_w[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sw}[0] \\ R_{sw}[1] \\ \vdots \\ R_{sw}[N] \end{bmatrix}$$

These equations are known as the Wiener-Hopf equations. The matrix T appearing in the equation is a symmetric Toeplitz matrix. These matrices are known to be positive definite and therefore non-singular yielding a unique solution to the determination of the Wiener filter coefficient vector, $\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}$.

A regression model is a linear one when the model comprises a linear combination of the parameters, i.e.

$$f(x_i, \beta) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \phi_j(x_i)$$

where the coefficients, ϕ_j, are functions of x_i.

Letting

$$X_{ij} = \frac{\partial f(x_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \phi_j(x_i).$$

we can then see that in that case the least square estimate (or estimator, in the context of a random sample), $\boldsymbol{\beta}$ is given by

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \boldsymbol{y}$$