SMG-1400 **SÄHKÖMAGNEETTISET KENTÄT JA AALLOT 2**

Tentti 16.12.2009, ei muistiinpanoja, ei laskimia. Saku Suuriniemi. Kaikki tehtävät 6 pistettä.

1. Oikein vai väärin? *Perustele lyhyesti tai anna esimerkki.*
   (a) Sähkömagneettiseksi induktioksi (myöhemmin pelkkä "induktio") kutsutaan sitä, kun sähkökenttä aiheuttaa varauksenkuljettajien liikkeen.
   (b) Induktiota ei voida huomioida piiriteoriassa.
   (c) Induktiolla voidaan selittää generaattorin toiminta.
   (d) Induktion syntyminen vaatii aina metallisen sähköjohdon, jossa varauksenkuljettajat ovat kiihtyvässä liikkeessä.
   (e) Induktiosta voi olla harmia.
   (f) Induktio vaatii magneettivuon muutoksen.

2. Kurssin kuluessa on käytetty kolmea väliaineyhtälöä. Esittele niistä kukin, kerro jokaisesta väliainevakion nimi, ja mitkä sähkömagneettiset kentät se liittää toisiinsa. Jos osaat muutamalla sanalla kuvata, mitä yhtälö kertoo tapahtumista väliaineissa, niin kerro. *Käytä kuhunkin enintään kolme harkittua virkettä.*

3. Monokromaattisen aallon sähkökentälle saamme johtavassa väliaineessa aaltoyhtälön $\nabla^2\underline{\mathbf{E}} + (\omega^2\epsilon\mu + j\omega g\mu)\underline{\mathbf{E}} = 0$.
   (a) Jos jokin sähkökenttä $\underline{\mathbf{E}}$ ei toteuta yhtälöä, mitä siitä voimme päätellä? (1p)
   (b) Saamme yhtälöstä tasoaallon aaltoluvulle $k$ ehdon $k^2 = \omega^2\epsilon\mu + j\omega g\mu$. Ns. hyvässä johteessa ensimmäinen termi pudotettiin pois, koska se on hyvin pieni: ilmaise ehto kulmataajuuksille $\omega$, joilla näin voidaan tehdä. (2p)
   (c) Ratkaisuksi $k$:lle saamme (b)-kohdan pikkuvilungin jälkeen $k = \pm\sqrt{j\omega g\mu}$. Mitä eri merkit tarkoittavat $z$-akselin suunnassa etenevälle aallolle? (1p)
   (d) Tulos on kompleksiluku $k = \pm(k_r + jk_i) = \pm\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega g\mu}$. Käytä tehtävän 5(b) lauseketta selittääksesi miten $k$:n imaginääriosa vaikuttaa aallon luonteeseen. (2p)

4. Poyntingin teoreema:
$$-\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,dV = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V [\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}]\,dV + \int_{\partial V} \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\,da.$$
   (a) Minkä tärkeän fysiikan perusperiaatteen yhtälö kuvaa? (1p)
   (b) Riippuuko yhtälön paikkansapitävyys tarkasteltavaa järjestelmää kuvaavan alueen $V$ valinnasta? Perustele. (1p)
   (c) Voiko sen avulla päätellä mistä kohtaa teho siirtyy järjestelmän rajan läpi toiseen järjestelmään? Perustele. (1p)
   (d) Sovella teoreemaa tapaukseen, jossa ladattu kondensaattori kytketään kelan johtimien päihin, ja kela ja kondensaattori ovat samassa järjestelmässä $V$. Huomioi johtojen häviöllisyys. (3p)

5. (a) Erilaisia polarisaatiotyyppejä on kolme, ja joillain niistä on alatyyppejä. Nimeä ja kuvaa ne lyhyesti. (3p)
   (b) Osoita, että monokromaattisen tasoaallon $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{j(kz-\omega t)}$ magneettikentän avulla määritelty polarisaatio on sama kuin sähkökentän. (3p)

→

Vektorianalyysin kaavoja

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{1}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{2}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{4}$$
$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{5}$$
$$\nabla(a\phi + b\psi) = a\nabla\phi + b\nabla\psi \tag{6}$$
$$\nabla \cdot (a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a\nabla \cdot \boldsymbol{F} + b\nabla \cdot \boldsymbol{G} \tag{7}$$
$$\nabla \times (a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a\nabla \times \boldsymbol{F} + b\nabla \times \boldsymbol{G} \tag{8}$$
$$\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \tag{9}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0 \tag{10}$$
$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \tag{11}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F} \tag{12}$$
$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \tag{13}$$
$$\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) \tag{14}$$
$$\nabla \cdot (\phi\boldsymbol{F}) = (\nabla\phi) \cdot \boldsymbol{F} + \phi\nabla \cdot \boldsymbol{F} \tag{15}$$
$$\nabla \times (\phi\boldsymbol{F}) = (\nabla\phi) \times \boldsymbol{F} + \phi\nabla \times \boldsymbol{F} \tag{16}$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = -\boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) \tag{17}$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}) - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} \tag{18}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3 \tag{19}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{r} = 0 \tag{20}$$
$$\nabla\phi(r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\phi}{dr} \tag{21}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \frac{d\boldsymbol{F}}{dr} \tag{22}$$
$$\nabla \times [\boldsymbol{r}\phi(r)] = 0 \tag{23}$$
$$\nabla'\phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = -\nabla\phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{24}$$
$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla\phi \cdot d\boldsymbol{l} = \phi(\boldsymbol{r}_2) - \phi(\boldsymbol{r}_1) \tag{25}$$
$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} da = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{26}$$
$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{F} dv = -\oint_S \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n} da \tag{27}$$
$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} da \tag{28}$$

Kaavoissa $a$ ja $b$ ovat skalaarivakioita, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ vakiovektoreita, $\phi$ ja $\psi$ skalaarikenttiä ja $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{G}$ vektorikenttiä. $\boldsymbol{r}$ ja $\boldsymbol{r}'$ ovat paikkavektorikenttiä ja $r = |\boldsymbol{r}|$.